小野高幸, 三好由純, 太陽地球圏,
共立出版, 2012

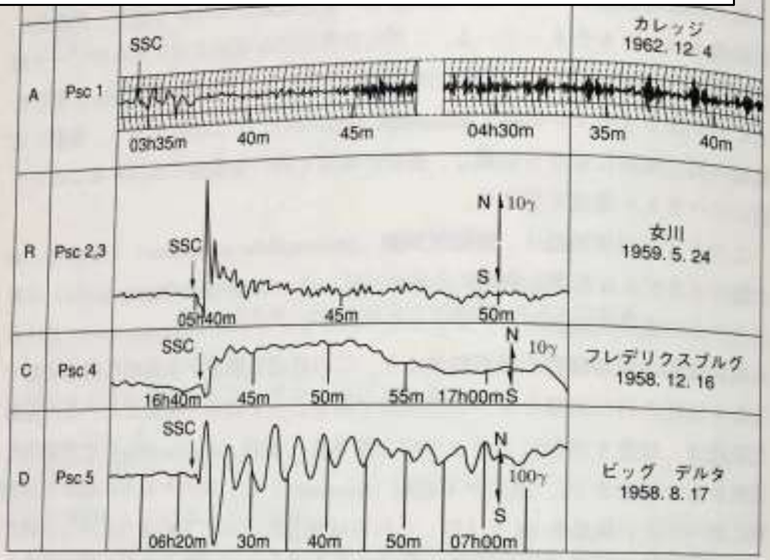

図5.11 PSC 地磁気脈動の観測波形の例

磁気嵐急始（strom sudden commencement: SSC）とともに P_{SSC} 地磁気脈動が現れている.（Saito, 1969）

（Kelvin-Helmholtz）不安定性や太陽風動圧の時間変動などによって発生し，放射線帯の高エネルギー電子の輸送に密接にかかわっていると考えられている.

一方，第3章で述べたように Pi2 波動は，サブストームの開始に出現する波動であり，Pi2 観測からサブストームの発生時を決める研究もよく行われている．さらに，Pssc 脈動は図 5.11 のように，磁気急始（SSC：第 4 章参照）によってトリガーされる脈動である.

5.5 プラズマ波動の伝搬と減衰

5.5.1 波動の減衰と増幅の表現

波動の角周波数 ω に比べてゆっくりと変化する波動の振幅を A_0 とおくと，

波動の変位 $A(t)$ は

$$A(t) = A_0(t)\exp(-i\omega t) \tag{5.117}$$

と書くことができる．いま振幅が指数関数的に変化する波動の成長率（growth rate）を γ とすると，時刻 t における振幅は時刻 $t=0$ における振幅 $A_0(0)$ を用いて

$$A_0(t) = A_0(0)\exp(\gamma t) \tag{5.118}$$

と表される．このとき

$$A(t) = A_0(0)\exp(\gamma t)\exp(-i\omega t) = A_0(0)\exp\{-i(\omega + i\gamma)t\} \tag{5.119}$$

すなわち波動の振幅の成長率 γ は

$$\frac{d}{dt}(A_0(t)) = \gamma A_0(t) \tag{5.120}$$

$$\gamma = \frac{1}{A_0(t)}\frac{d}{dt}(A_0(t)) \tag{5.121}$$

として表される.

また波動を $A(t) = A_0\exp(-i\omega t)$ のように表す場合，$\omega = \omega_r + i\gamma$ なる複素角周波数 ω の虚部 γ が正の場合には増幅を，負の場合には減衰を表すことになる．さらに波動の伝搬を考慮すると，時空間の位置 (r, t) における波動の変位は一般的に

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{5.122}$$

のように表される．ここで $\vec{k}$ は波数ベクトルである．一般的には波数もまた同様に複素数として扱えるが，通常のプラズマ波動論においては，振幅が変化する現象を記述する場合には，角周波数 ω のみを複素数として扱うことが多い.

A 波動の減衰現象の例

(1) 球面波の伝搬による幾何学的減衰：波動が球面波によって伝搬する場合，たとえば電場は，

$$E = \frac{E_0}{r}\exp i(kr - \omega t)$$

のように変化するが，エネルギーは，

$$\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}\cdot[\mathbf{K}]\cdot\vec{E} \propto \frac{E_0^2}{r^2}$$

のように，距離の 2 乗に反比例して弱くなる．ただし，半径 r の球殻の中にある全体のエネルギーは保存される．

(2) 衝突による減衰：プラズマが完全電離状態になく，電離圏のようにプラズマ媒質の荷電粒子と中性粒子との間に衝突がある場合は，電磁場エネルギーは中性粒子の運動エネルギーへ受け渡される．このとき，波動のもつ電磁場エネルギーは減衰しつつ伝搬する（5.5.2 項参照）．具体的には，電離圏下部（E 領域）をプラズマ波動が通過する場合に，波動強度の顕著な減衰が引き起こる現象がよく知られている．

(3) 波動粒子相互作用による減衰：完全電離無衝突のプラズマであっても波動・粒子間に相互作用が起きる結果，波動の電磁場エネルギーがプラズマ粒子の熱運動エネルギーに受け渡されて，プラズマ波動の減衰が起きる（等価衝突）．**ランダウ減衰**（Landau damping），**サイクロトロン減衰**（cyclotron damping）などがこれにあたる．このとき，プラズマ粒子は加熱・加速されている．

(3) の具体的な例として，ランダウ減衰を考えてみよう．ランダウ減衰では，波動の位相速度に近い速度をもつ粒子が，波動との相互作用を行った結果，共鳴速度点における分布関数の傾き $f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right)$ が波動と粒子の間のエネルギーの授受の方向と速さを決めている（❸「ランダウ減衰に関する補足」を参照）．このときの共鳴条件は，波動の位相速度と粒子の速度が等しいという条件

$$\omega - \vec{k}\cdot\vec{v} = 0$$

で表され，この共鳴を**ランダウ共鳴**（Landau resonance）とよぶ．ランダウ減衰は，後述の「ランダウ減衰に関する補足」にあるように，その前提条件として，存在しているプラズマ波動は 1 次微少量であり，ランダウ減衰の過程は線形過程としてひき起こされる点である．ランダウ共鳴の説明として，有限振幅の電場のポテンシャルの山と荷電粒子間のエネルギーをやりとりとしている描像が用いられることが多いが，必ずしも正確でないので注意を要する．

上記のランダウ減衰は，縦波であるプラズマ波動の電場方向と同じ方向の速度をもつ粒子を議論している．一方，横波の場合には，磁力線に沿って運動している粒子から見た波動の周波数が，粒子のサイクロトロン周波数の整数倍と

等しくなるという条件，

$$\omega - \vec{k}\cdot\vec{v} = n\Omega$$

で表される（ただし非相対論の場合）．この式の左辺は，粒子から見た波動の周波数がお互いの運動のためにドップラー（Doppler）シフトを受けていることを表している．この共鳴を**サイクロトロン共鳴**（cyclotron resonance）とよぶ．また，このように生じる相互作用は**サイクロトロン型相互作用**（cyclotron-type interaction）とよばれ，サイクロトロン減衰などが生じることになる．なお，第 4 章では相対論効果を含んだサイクロトロン共鳴の式を示したが（(4.6) 式），放射線帯粒子との相互作用やオーロラ加速粒子との相互作用を考える場合には，相対論効果を含んだ共鳴条件を考慮する必要がある．

❸ ランダウ減衰に関する補足

Landau（1946）は，無磁場中で均質で安定な完全電離プラズマ中で z 軸方向に伝搬する静電波

$$E(z,t) = \hat{z}E\cos(kz - \omega t) \tag{5.123}$$

を考えた．このとき，電子プラズマの分布関数が満たすブラソフ（Vlasov）方程式は一次元問題として，

$$\frac{\partial f(z,v,t)}{\partial t} + v\frac{\partial f(z,v,t)}{\partial z} + \frac{qE(z,t)}{m}\frac{\partial f(z,v,t)}{\partial v} = 0 \tag{5.124}$$

である．この解を求めるにあたって Landau は，空間に対してはフーリエ変換，時間に対してはラプラス変換を適用した．すなわち**フーリエ-ラプラス変換**（Fourier-Laplace transformation）は，

$$E(\omega,k) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp i(kz - \omega t)E(z,t) \tag{5.125}$$

また逆変換は

$$E(z,t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \exp i(kz - \omega t)E(\omega,t) \tag{5.126}$$

である．ただし，この複素積分の ω 複素平面上の積分路は $E(\omega,k)$ の**特異点**（singular point）を回避して複素平面上の虚部が正の側（上側）を通る．$f = f_0 + f_1$ として f_0 は 0 次の量で，仮定により $\frac{\partial f_0(z,v,t)}{\partial z} = 0$ ならびに $\frac{\partial f_0(z,v,t)}{\partial t} = 0$，

つまり t および z に独立とする．f_1，E，v は1次の微少量として，(5.124) 式を線形化すると，

$$\frac{\partial f_1(z,v,t)}{\partial t} + v\frac{\partial f_1(z,v,t)}{\partial z} + \frac{qE(z,t)}{m}\frac{\partial f_0(z,v,t)}{\partial v} = 0 \tag{5.127}$$

フーリエ-ラプラス変換は

$$(i\omega - ikv)f_1 = \frac{qE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{5.128}$$

となる．また，ポアソンの式から電場を求めると

$$ikE(\omega,t) = \frac{q}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega,k,v)\,dv \tag{5.129}$$

である．すると，(5.128) を (5.129) 式に代入して，

$$E(\omega,k) = \frac{\dfrac{q}{k\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(v,k)}{\omega - kv}dv}{1 + \dfrac{1}{k\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^2}{m}\frac{\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}}{\omega - kv}dv} \tag{5.130}$$

となる．ここで $E(z,t)$ のラプラス変換 $E(\omega,t) = \int_0^{\infty} dt \exp i(\omega t)E(z,t)$ の収束条件より，$\mathrm{Im}\,\omega > |\gamma|$ である．ここで，$|E(z,t)| < |Me^{\gamma t}|$ であるから，$E(\omega,k)$ は，ω の複素平面で $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ の領域で定義されている．したがって，$E(\omega,k)$ のラプラス逆変換において，積分路は複素平面の $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ の領域において実行される必要がある．このとき，$\mathrm{Im}\,\omega < 0$ の領域に特異点がある場合にとられる積分路は，**ランダウの積分路**（Landau contour）とよばれる（図5.12参照）．この $E(\omega,k)$ の特異点を得る方程式は，プラズマ中を伝搬する静電波の分散方程式となる．すなわち，

$$1 + \frac{1}{k\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^2}{m}\frac{\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}}{\omega - kv}dv = 0 \tag{5.131}$$

である．(1.8) 式よりプラズマ周波数は

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Z^2e^2n}{\varepsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

であり，プラズマ角周波数 Π については $\Pi^2 = \dfrac{Z^2e^2n}{\varepsilon_0 m}$ であるので，(5.131) 式は

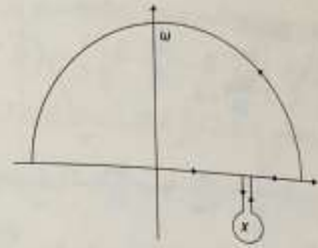

図5.12 特異点が $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ ある場合にとられる積分路（ランダウの積分路）

$$1 + \frac{\Pi^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}\frac{dv}{\omega - kv} = 0 \tag{5.132}$$

と書き直すことができる．ただしこれは，$\mathrm{Im}\,\omega > 0$ の場合であり，$\mathrm{Im}\,\omega < 0$ の場合，

$$1 + \frac{\Pi^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}\frac{dv}{\omega - kv} - \frac{2\pi i\Pi^2}{k|k|}\frac{\partial f_0(\omega/k)}{\partial v} = 0 \tag{5.133}$$

となる．したがって

$$f_0'(v) = \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} = f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

と書くことができて，(5.133) 式は

$$1 + \frac{\Pi^2}{k}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}\frac{dv}{\omega - kv} - \frac{2\pi i\Pi^2}{k|k|}f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right) = 0\ (\text{すべての}\ \mathrm{Im}\,\omega\ \text{について}) \tag{5.134}$$

となる．詳細は Landau (1946)，Stix (1962) をはじめとする他の文献にゆずるが，$\omega = \omega_r + i\omega_i (|\omega_r| \gg |\omega_i|)$ として，波動の成長と減衰は以下の式で表される（ここで $\bar{v}$ はプラズマ全体のドリフトの運動速度である）．

$$\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}\omega_i = \frac{2\pi i(\omega_r - k\bar{v})\Pi^2}{k|k|}f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{5.135}$$

$\omega_i < 0$ のときに波動は減衰し，ランダウ減衰とよばれる．一方，$\omega_i > 0$ のときには，**逆ランダウ減衰**（inverse Landau damping）（ランダウ型プラズマ不安定）とよばれ，プラズマ波動の励起・成長過程の基礎的なプロセスとなっている．

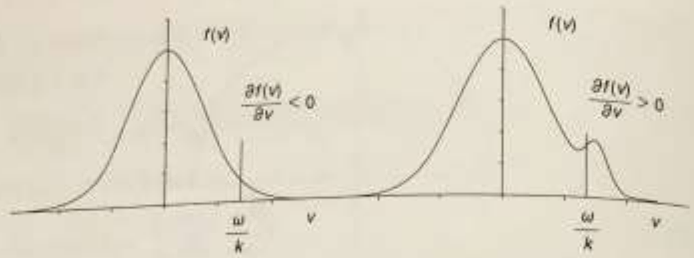

図 5.13　ランダウ型相互作用と速度分布関数の関係図

$v = \frac{\omega}{k}$ における速度分布関数の傾きが $\frac{\partial f(v)}{\partial v}$ の場合，ランダウ減衰 $\frac{\partial f(v)}{\partial} > 0$ のときランダウ増幅（ランダウ不安定）の関係をもたらす．$v = \frac{\omega}{k}$ における速度分布関数の傾きによって減衰あるいは，増幅が起こることになる．

る（図 5.13 参照）．

さて，ここでプラズマ中を伝播するプラズマ波動のエネルギー保存則について考えよう．電磁場を記述するマクスウェル方程式は，

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.136}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.137}$$

である．ここで，((5.136) 式 $\cdot\vec{H}$−(5.137) 式 $\cdot\vec{E}$) をとると

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \tag{5.138}$$

となり，ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

を用いると，(5.138) 式は

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.139}$$

である．ここで，$\vec{P} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$ はポインティングベクトルである．さらに

$$\text{電場エネルギー密度：}\quad \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E} \cdot [\mathbf{K}] \cdot \vec{E} \tag{5.140}$$

$$\text{磁場エネルギー密度：}\quad \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2 \tag{5.141}$$

を考慮すると，(5.139) 式は電磁エネルギーの保存則にあたることが示される．すなわち，$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}\right) = \frac{1}{2}\left[\vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right]$ であることを考慮し，ここで，$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$ より $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega}\vec{J}$ となり，また，

$$\begin{aligned}\vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega}\vec{J}\right) \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{i}{\omega}\vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{i}{\omega}\vec{J} \cdot (-i\omega \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

である．したがって，エネルギー保存則を与える (5.139) 式が

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})\right] = 0 \tag{5.142}$$

の形に従うことになり，ポインティングベクトルが電磁場エネルギーの流れを表していることがわかる．

5.5.2　衝突のあるプラズマの誘電率テンソル

冷たいプラズマの近似による波動方程式の解が，ω あるいは k について純虚数となる場合，エバネッセントモードとなって伝搬しないが，複素数解をとる場合，波動の電磁エネルギーは伝搬しつつ，荷電粒子と中性粒子との間の衝突による運動量の交換によりエネルギーを失っていく．

このとき，粒子の運動方程式は，ν を衝突周波数として，

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m^{n}\nu\vec{v} \tag{5.143}$$

と表すことができる．フーリエ成分で表示すると

$$\begin{aligned}-i\omega m\vec{v} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\nu\vec{v} \\ -i\omega\left(1 + \frac{i\nu}{\omega}\right)m\vec{v} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\end{aligned} \tag{5.144}$$

である．ここで，

$$Z = 1 + i\left(\frac{\nu}{\omega}\right) \tag{5.145}$$

という変数を導入し，

$$m \to mZ$$